

La simmetria di BRST in un modellino quanto-meccanico

Abstract

Discutiamo nell'ambito del più semplice modello quantistico il meccanismo di compensazione dei gradi di libertà generato dalla simmetria di BRST evidenziando il ruolo di quartetti di oscillatori bosonici e fermionici.

Carlo. M. Becchi

Università di Genova e INFN Genova

La Storia

La costruzione di **BRST** è l'ultimo episodio della lunga storia della **quantizzazione delle teorie di gauge**.

Questa storia inizia con la interpretazione di Einstein dell'effetto foto-elettrico basata sul concetto del **fotone con due stati di polarizzazione**.

La quantizzazione del campo elettromagnetico parte da una **lagrangiana** funzione del **potenziale tetra-vettoriale** . A prima vista questo implicherebbe **4 stati di polarizzazione** del fotone.

Tuttavia questa lagrangiana induce **vincoli di prima classe di Dirac-Bergmann** ^a che sono associati alla invarianze di gauge.

^asee e.g. K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, Lecture Notes in Physics Vol. 169. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1982.

Nei casi di maggiore interesse il metodo di Dirac-Bergmann induce la **perdita dell'esplicita covarianza della teoria** con gravi conseguenze al livello della **renormalizzazione**.

Un metodo alternativo è basato sull'introduzione di condizioni supplementari covarianti, che sono dette **gauge fixing**, intese a ridurre il numero dei gradi di libertà.

Per una ragione puramente fortuita, cioè la conservazione della corrente della materia, in **QED** le più semplici condizioni supplementari risultano **stabili dinamicamente**.

Ciò rende possibile quantizzare la teoria tramite regole canoniche covarianti, seppure **abbandonando l'identificazione dello spazio degli stati con uno spazio di Hilbert**.

Tuttavia questa condizione favorevole non sopravvive la **estensione della teoria al caso non abeliano**, cioè per esempio al caso di Yang-Mills.

Il problema è stato risolto da **Faddeev e Popov^a** in una formulazione della teoria nell'ambito del **metodo funzionale di Feynman** introducendo un sistema di **ghost fermionici**.

Questi ghost corrispondono a **gradi di libertà compensanti** le **componenti longitudinali e scalari** dei campi di gauge.

^aL.D.Faddeev and V.N.Popov, Phys.Letters B25 (1967) 29.

Partendo dal lavoro di Faddeev e Popov **Slavnov e Taylor**^{ab} hanno mostrato come le identità di Ward-Takahashi relative alla QED cambiano nel caso non abeliano.

Le **nuove identità per le funzioni di Green** suggerirono a **B.R.S** nel 1974^c e, indipendentemente, a **Tyutin** nel 1975^d l'esistenza di una *proprietà* che al livello quantistico garantisce **la coerenza fisica** della teoria e, in particolare, la sua **unitarietà**.

Questa proprietà è chiamata **simmetria di BRST**; peraltro non si tratta di una simmetria perché non agisce sulle osservabili.

^aJ.C.Taylor, Nucl.Phys. B33 (1971) 436.

^bA.A. Slavnov, Theor.Math.Phys.10 (1972) 99.

^cC.M.B., A.Rouet and R.Stora, Phys Letters. 52B (1974) 344.

^dL.V.Tyutin, Lebedev preprint FIAN n.39 (1975).

Il meccanismo a quartetti di Kugo-Ojima

La **teoria dei campi** è quantizzata **sullo spazio di Fock degli stati di scattering**. Questo spazio è generato nella quantizzazione degli oscillatori corrispondenti ai **modi normali dei campi asintotici** che sono campi liberi.

Il meccanismo di compensazione dei gradi di libertà, **il meccanismo a quartetti di Kugo-Ojima**^a, estende alla teoria dei campi il processo di quantizzazione qui di seguito illustrato per un sistema **formato da quattro oscillatori**^b.

^aT. Kugo, I. Ojima, Phys.Lett.B73 (1978) 459.

^bC.M.B., C. Imbimbo (2008), Scholarpedia, 3(10):7135

http://www.scholarpedia.org/article/Becchi-Rouet-Stora-Tyutin_symmetry

Consideriamo un **oscillatore armonico bidimensionale e isotropo** la cui hamiltoniana è:

$$H = \bar{P}P + \omega^2 \bar{z}z .$$

Questo **oscillatore bosonico** viene **quantizzato** introducendo gli operatori di distruzione A e \bar{A} , i corrispondenti operatori di creazione e lo stato di vuoto $|0\rangle$.

In questo formalismo di seconda quantizzazione l'operatore hamiltoniano è:

$$H = \omega(A^\dagger A + \bar{A}^\dagger \bar{A} + 1) ,$$

e il suo spettro è dato da $E_{(n,m)} = \omega(n + m + 1)$ with $n, m = 0, 1, 2, \dots, \infty$.

Chiameremo **oscillatore fermionico** il sistema con la **stessa hamiltoniana** e le stesse **equazioni del moto** quantizzato partendo da **regole di anti-commutazione** canoniche.

In termini degli operatori di distruzione a a \bar{a} e dei corrispondenti operatori di creazione l'hamiltoniano è dato da

$$H = \omega(a^\dagger a + \bar{a}^\dagger \bar{a} - 1) ,$$

e il suo spettro è $E_{(n,m)} = \omega(n + m - 1)$ with $n, m = 0, 1$.

Combiniamo gli oscillatori fermionici e bosonici in un **oscillatore B-F** con hamiltoniano:

$$\mathbf{H} = H + \mathcal{H} = \omega(A^\dagger A + \bar{A}^\dagger \bar{A} + \bar{a}^\dagger \bar{a} + a^\dagger a) .$$

La teoria corrispondente è invariante sotto **trasformazioni di super-symmetria estesa** generate dalla **carica fermionica** :

$$Q = i(\bar{A}^\dagger \bar{a} - a^\dagger A) .$$

e dalla sua hermitiana coniugata:

$$Q^\dagger = i(A^\dagger a - \bar{a}^\dagger \bar{A}) ,$$

Entrambe le cariche sono nilpotenti: $Q^2 = (Q^\dagger)^2 = 0$, e soddisfano le regole di anti-commutazione:

$$\{Q, Q^\dagger\} = \frac{H}{\omega} .$$

Questa equazione ha due conseguenze importanti:

- 1- Il sottospazio dello spazio di Fock annichilato da Q e Q^\dagger è generato da $|0\rangle$
- 2- $\text{Ker}Q$, il sottospazio annichilato da Q alone, coincide con l'insieme dei vettori $\alpha|0\rangle + Q|s\rangle$ per qualunque α e $|s\rangle$.

Non è difficile trasferire quanto sopra nell'ambito di una **Teoria di Gauge** identificando per ogni impulso e colore gli **stati asintotici dei gluoni con polarizzazione longitudinale o scalare** con quelli di un **oscillatore bosonico** e quelli dei **ghost di Faddeev-Popov** con gli stati degli **oscillatori fermionici**. Si tratta di gradi di libertà che vanno considerati **non-fisici** e di cui vogliamo **liberarci**.

Il modo più ovvio per ottenere questo risultato consiste nel **selezionare come *fisici* i vettori invarianti per la supersimmetria estesa**, cioè quelli annichilati sia da Q , sia da Q^\dagger , cioè il vettore $|0\rangle$. Tuttavia in teoria dei campi questa condizione risulta eccessivamente rigida e **non può essere formulata in modo covariante**.

Se invece usiamo **la condizione più debole** scegliendo $KerQ$, il nucleo di Q , cioè lo spazio degli vettori annichilati da Q , **rimaniamo con troppi vettori privi di interpretazione fisica.**

Peraltro è possibile superare questa difficoltà **togliendo a ImQ qualunque significato fisico.** Per questo è però necessario **introdurre una interpretazione dello spazio vettoriale come uno spazio a metrica indefinita.**

La costruzione usuale di uno spazio a metrica indefinita parte da uno spazio di Hilbert \mathcal{H} e si basa sull'identificazione di un operatore metrico M hermitiano e con nucleo vuoto.^a

Si definisce uno pseudo-prodotto-scalare:

$$\langle\langle s|t \rangle\rangle \equiv \langle s|M|t \rangle$$

e quindi una pseudo-norma al quadrato $\langle s|M|s \rangle$.

e si normalizza M tramite

$$\langle 0|M|0 \rangle = 1$$

^aC.M.B., C. Imbimbo (2008), Scholarpedia, 3(10):7135

Se

$$Q^\dagger M = MQ$$

i vettori di ImQ hanno pseudo-norma nulla

$$\langle\langle Qs|Qs \rangle\rangle = \langle s|Q^\dagger MQ|s \rangle = \langle s|MQ^2|s \rangle = 0$$

e sono pseudo-ortogonali agli elementi di $KerQ$.

Infatti se $Q|f \rangle = 0$

$$\langle\langle Qs|f \rangle\rangle = \langle s|Q^\dagger M|f \rangle = \langle s|MQ|f \rangle = 0 .$$

Quindi possiamo estendere l'interpretazione probabilistica usuale del prodotto scalare dei vettori di stato in uno spazio di Hilbert allo pseudo-prodotto-scalare dei vettori di $KerQ$, dato che questi hanno pseudo-norma non negativa.

Inoltre, come si è detto, gli elementi di $KerQ$ si decompongono in $\alpha|0\rangle + Q|s\rangle$, la cui pseudo-norma al quadrato è $|\alpha|^2$.

Per questo due vettori la cui differenza sia $Q|s\rangle$, per qualche $|s\rangle$, vanno considerati equivalenti dal punto di vista fisico.

La nuova interpretazione fisica degli elementi di $KerQ$ si riferisce a *classi di vettori Q -equivalenti* . Queste classi definiscono uno **spazio di Hilbert** , che nel nostro esempio è, come si voleva, unidimensionale.

Vettori differenti appartenenti alla stessa classe di equivalenza vanno considerati come gauge equivalenti, cioè collegati da una trasformazione di gauge.

Conclusioni

In questa breve lezione abbiamo introdotto il **generatore Q della simmetria di BRST** la cui azione è stata definita, tramite in modi normali, sullo spazio degli stati asintotici di una teoria di gauge e, di conseguenza, **sui campi asintotici**.

Non discutiamo qui **l'estensione** della costruzione ai **campi interagenti** perché questo è l'aspetto della simmetria di BRST che è presentato, in approssimazione semi-classica, sui libri di testo e può essere letto per esempio in^a.

Tralasciamo anche, perché troppo tecnica, l'analisi della simmetria di BRST al livello **rinormalizzato**^b e i problemi connessi con la presenza dell'**orizzonte di Gribov**.^c

^aC.M.B., C. Imbimbo (2008), Scholarpedia, 3(10):7135n

^bC.M.B., A. Rouet, R. Stora, Ann. Phys. 98 (1976) 287

^cC.M.B., S. Giusto, C. Imbimbo, The functional measure of gauge theories in the presence of Gribov horizons. Talk given at 6th International Conference on "Path Integrals from peV to TeV: 50 years after Feynman's paper" (World Scientific, Singapore, 1999)