

xxxii convegno informale di fisica teorica

processi esplorativi nel piano ed evoluzione di löwner stocastica

antonio celani^a andrea mazzino^b marco tizzi^b

^acentre national de la recherche scientifique, institut pasteur, paris

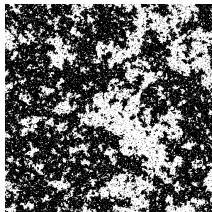
^bistituto nazionale di fisica nucleare, sezione di genova
università di genova, dipartimento di fisica

sestri levante, mercoledì 10 giugno 2009



descrivere sistemi fisici in due dimensioni

meccanica
statistica



descrizione geometrica

- proprietà di interfacce
- simmetrie statistiche
- classi di universalità

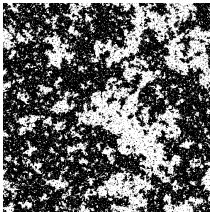
simmetrie

- isotropia
- invarianza di scala
- **invarianza conforme**

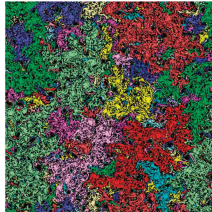


descrivere sistemi fisici in due dimensioni

meccanica
statistica



turbolenza



descrizione geometrica

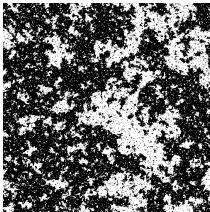
- proprietà di interfacce
- simmetrie statistiche
- classi di universalità

simmetrie

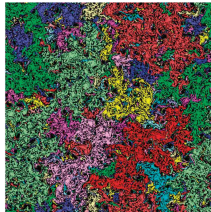
- isotropia
- invarianza di scala
- **invarianza conforme**

descrivere sistemi fisici in due dimensioni

meccanica
statistica



turbolenza



fratture



descrizione geometrica

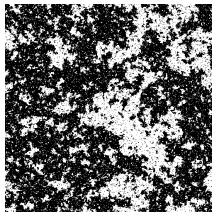
- proprietà di interfacce
- simmetrie statistiche
- classi di universalità

simmetrie

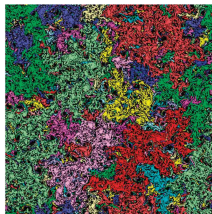
- isotropia
- invarianza di scala
- **invarianza conforme**

descrivere sistemi fisici in due dimensioni

meccanica
statistica



turbolenza



fratture



descrizione geometrica

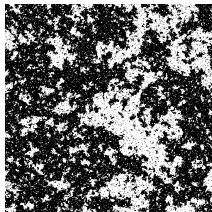
- proprietà di interfacce
- simmetrie statistiche
- classi di universalità

simmetrie

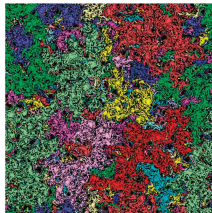
- isotropia
- invarianza di scala
- **invarianza conforme**

descrivere sistemi fisici in due dimensioni

meccanica
statistica



turbolenza



fratture



descrizione geometrica

- proprietà di interfacce
- simmetrie statistiche
- classi di universalità

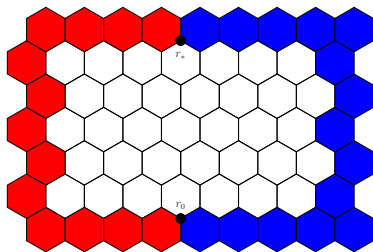
simmetrie

- isotropia
- invarianza di scala
- **invarianza conforme**

processi discreti di crescita stocastica

modelli di meccanica statistica

- realizzazione stocastica di equilibrio
- domini omogenei
- **interfacce critiche**



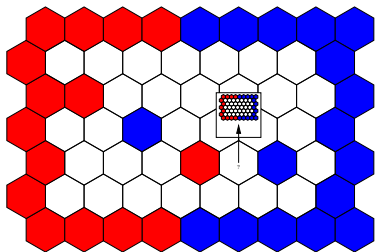
processi esplorativi

- regola stocastica di avanzamento
- misura sulla curva
- **equivalenza**
curva interfaccia

processi discreti di crescita stocastica

modelli di meccanica statistica

- realizzazione stocastica di equilibrio
- domini omogenei
- interfacce critiche



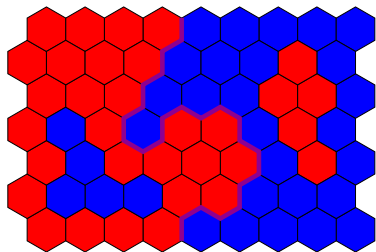
processi esplorativi

- regola stocastica di avanzamento
- misura sulla curva
- equivalenza
- curva interfaccia

processi discreti di crescita stocastica

modelli di meccanica statistica

- realizzazione stocastica di equilibrio
- domini omogenei
- **interfacce critiche**



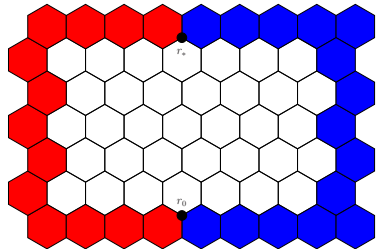
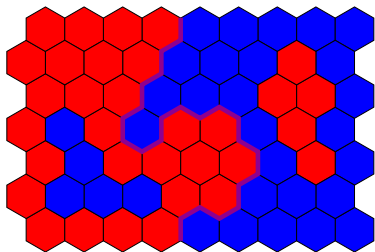
processi esplorativi

- regola stocastica di avanzamento
- misura sulla curva
- equivalenza
- *curve interfacce*

processi discreti di crescita stocastica

modelli di meccanica statistica

- realizzazione stocastica di equilibrio
- domini omogenei
- **interfacce critiche**



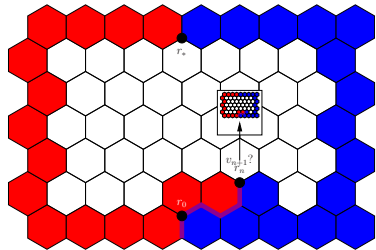
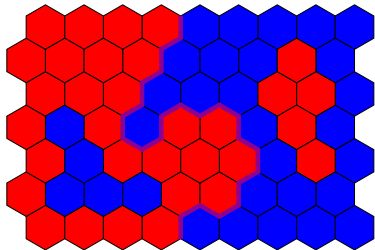
processi esplorativi

- regola stocastica di avanzamento
- misura sulla curva
- **equivalenza**
curva-interfaccia

processi discreti di crescita stocastica

modelli di meccanica statistica

- realizzazione stocastica di equilibrio
- domini omogenei
- **interfacce critiche**



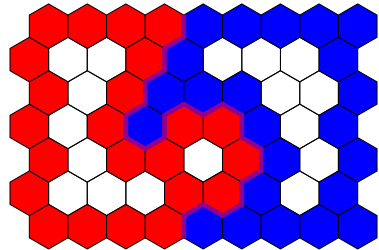
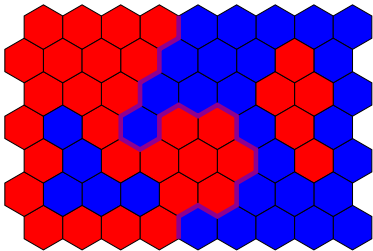
processi esplorativi

- regola stocastica di avanzamento
- misura sulla curva
- **equivalenza**
curva-interfaccia

processi discreti di crescita stocastica

modelli di meccanica statistica

- realizzazione stocastica di equilibrio
- domini omogenei
- **interfacce critiche**



processi esplorativi

- regola stocastica di avanzamento
- misura sulla curva
- **equivalenza** curva-interfaccia

processi continui di crescita stocastica



markovianità

$$\mu(\gamma|\gamma_1, \mathcal{D}) = \mu(\gamma \setminus \gamma_1, \mathcal{D} \setminus \gamma_1)$$

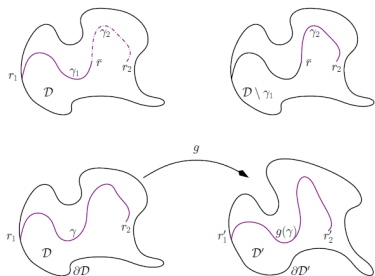
invarianza conforme

$$\mu(\gamma, \mathcal{D}) = (g * \mu)(g(\gamma), g(\mathcal{D}))$$

evoluzione di löwner

$$\frac{d}{dt} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - a_t}$$

processi continui di crescita stocastica



markovianità

$$\mu(\gamma | \gamma_1, \mathcal{D}) = \mu(\gamma \setminus \gamma_1, \mathcal{D} \setminus \gamma_1)$$

invarianza conforme

$$\mu(\gamma, \mathcal{D}) = (g * \mu)(g(\gamma), g(\mathcal{D}))$$

evoluzione di löwner

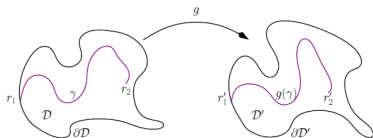
$$\frac{d}{dt} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - a_t}$$

processi continui di crescita stocastica



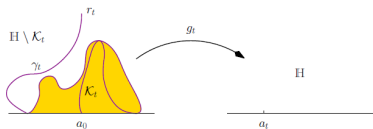
markovianità

$$\mu(\gamma | \gamma_1, \mathcal{D}) = \mu(\gamma \setminus \gamma_1, \mathcal{D} \setminus \gamma_1)$$



invarianza conforme

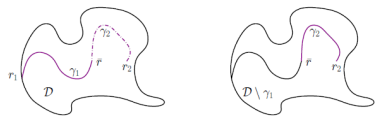
$$\mu(\gamma, \mathcal{D}) = (g * \mu)(g(\gamma), g(\mathcal{D}))$$



evoluzione di löwner

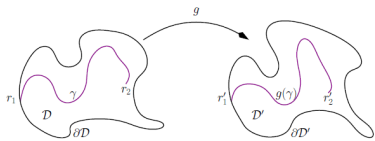
$$\frac{d}{dt} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - a_t}$$

processi continui di crescita stocastica



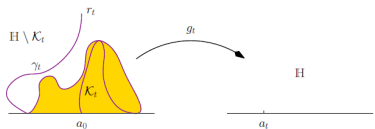
markovianità

$$\mu(\gamma | \gamma_1, \mathcal{D}) = \mu(\gamma \setminus \gamma_1, \mathcal{D} \setminus \gamma_1)$$



invarianza conforme

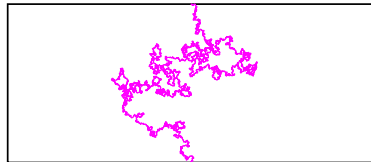
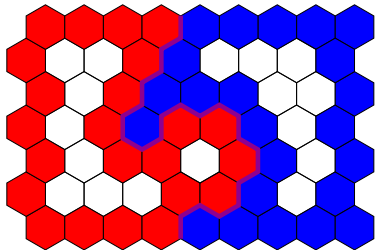
$$\mu(\gamma, \mathcal{D}) = (g * \mu)(g(\gamma), g(\mathcal{D}))$$



evoluzione di löwner
stocastica

$$\frac{d}{dt} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \sqrt{z} B_t}$$

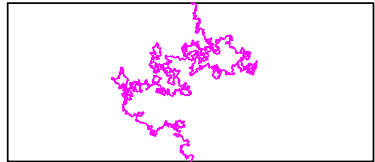
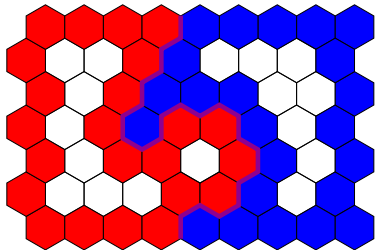
convergenza del processo discreto al continuo



problema aperto

- ogni s/e_x limite continuo di un processo esplorativo?

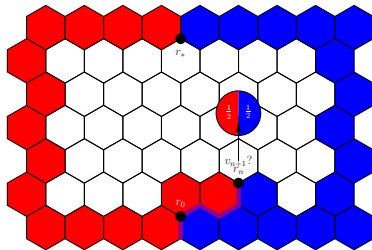
convergenza del processo discreto al continuo



problema aperto

- ogni sle_x **limite continuo** di un processo esplorativo?

ad oggi solo due casi dimostrati



percolazione critica

● $\kappa = 6$

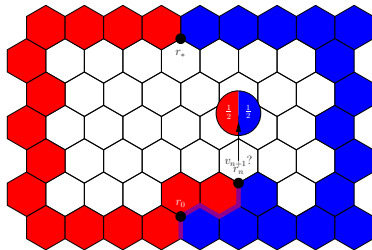
esploratore armonico

● $\kappa = 4$

obiettivi

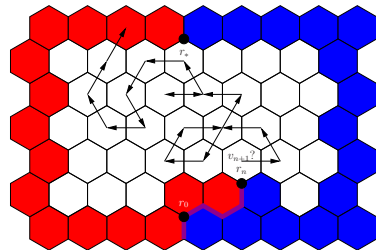
- generalizzazione di questi esploratori
- costruzione di una classe di esploratori markoviani e invarianti conformi

ad oggi solo due casi dimostrati



percolazione critica

• $\kappa = 6$



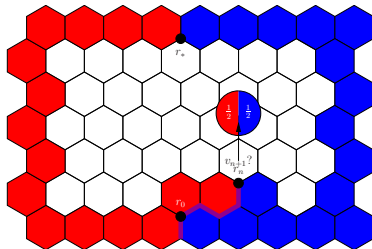
esploratore armonico

• $\kappa = 4$

obiettivi

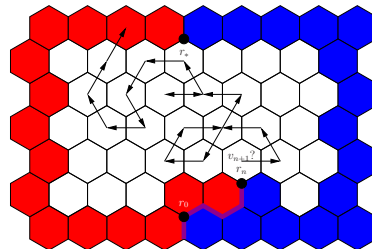
- generalizzazione di questi esploratori
- costruzione di una classe di esploratori markoviani e invarianti conformi

ad oggi solo due casi dimostrati



percolazione critica

• $\kappa = 6$



esploratore armonico

• $\kappa = 4$

obiettivi

- **generalizzazione** di questi esploratori
- costruzione di una **classe** di esploratori markoviani e invarianti conformi

processi di percolazione non conformi

regola di avanzamento

- lancio di moneta

probabilità di svolta a destra

$$P_-(v_{n+1}) = \frac{1}{2}$$

percolazione critica

- markoviana
- invariante conforme

regola di avanzamento

- lancio di moneta truccata

probabilità di svolta a destra

$$P_-(v_{n+1}) = p$$

percolazione iniqua

- markoviana
- **non** invariante conforme

processi di percolazione non conformi

regola di avanzamento

- lancio di moneta

probabilità di svolta a destra

$$P_-(v_{n+1}) = \frac{1}{2}$$

percolazione critica

- markoviana
- invariante conforme

regola di avanzamento

- lancio di moneta truccata

probabilità di svolta a destra

$$P_-(v_{n+1}) = p$$

percolazione iniqua

- markoviana
- **non** invariante conforme

processi di percolazione non conformi

regola di avanzamento

- lancio di moneta

probabilità di svolta a destra

$$P_-(v_{n+1}) = \frac{1}{2}$$

percolazione critica

- markoviana
- invariante conforme

regola di avanzamento

- lancio di moneta truccata

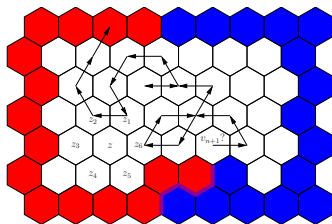
probabilità di svolta a destra

$$P_-(v_{n+1}) = p$$

percolazione iniqua

- markoviana
- **non** invariante conforme

ruolo cruciale della passeggiata aleatoria



armonicità

$$\mathcal{P}[z \xrightarrow{rw} r] = H_n(z)$$

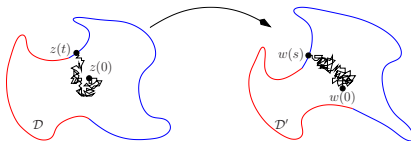
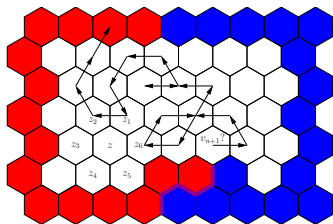
$$\Delta H_n(z) = 0$$

invarianza conforme

$$\begin{cases} dx = dW_x(t) \\ dy = dW_y(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = dW_u(s) \\ dv = dW_v(s) \end{cases}$$

se $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$ conforme

ruolo cruciale della passeggiata aleatoria



armonicità

$$\mathcal{P}\left[z \xrightarrow{rw} r\right] = H_n(z)$$

$$\Delta H_n(z) = 0$$

invarianza conforme

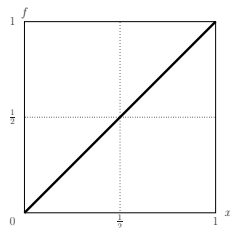
$$\begin{cases} dx = dW_x(t) \\ dy = dW_y(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = dW_u(s) \\ dv = dW_v(s) \end{cases}$$

se $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$ conforme

una famiglia a un parametro di esploratori

probabilità di svolta a destra

- esploratore armonico:
 $P_-(v_{n+1}) = H_n(v_{n+1})$
- *esploratore armonico deformato*:
 $P_-(v_{n+1}) = f(H_n(v_{n+1}))$
- *esploratore armonico annullato*: $P_-(v_{n+1}) = 1 - p + (2p - 1)H_n(v_{n+1})$



esempi

- $p = 1 \rightarrow \kappa = 4$
- $p = \frac{1}{2} \rightarrow \kappa = 6$

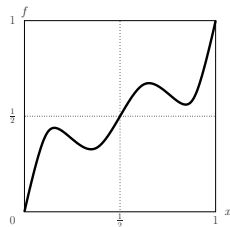
una famiglia a un parametro di esploratori

probabilità di svolta a destra

- esploratore armonico:
 $P_-(v_{n+1}) = H_n(v_{n+1})$
- *esploratore armonico deformato*:
 $P_-(v_{n+1}) = f(H_n(v_{n+1}))$
- *esploratore armonico annullato*: $P_-(v_{n+1}) = 1 - p + (2p - 1)H_n(v_{n+1})$

esempi

- $p = 1 \rightarrow \kappa = 4$
- $p = \frac{1}{2} \rightarrow \kappa = 6$



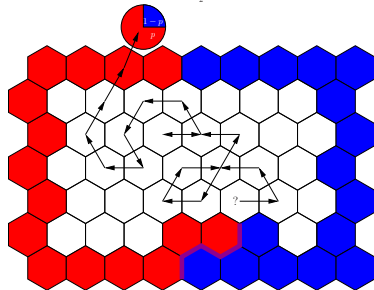
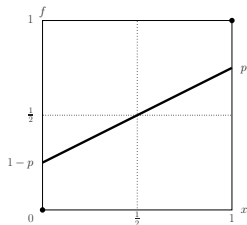
una famiglia a un parametro di esploratori

probabilità di svolta a destra

- esploratore armonico:
 $P_-(v_{n+1}) = H_n(v_{n+1})$
- *esploratore armonico deformato*:
 $P_-(v_{n+1}) = f(H_n(v_{n+1}))$
- *esploratore armonico annullato*: $P_-(v_{n+1}) = 1 - p + (2p - 1)H_n(v_{n+1})$

esempi

- $p = 1 \rightarrow \kappa = 4$
- $p = \frac{1}{2} \rightarrow \kappa = 6$



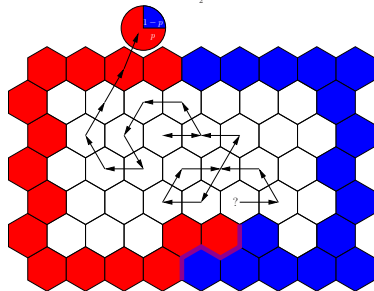
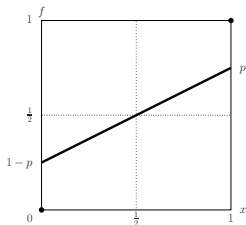
una famiglia a un parametro di esploratori

probabilità di svolta a destra

- esploratore armonico:
 $P_-(v_{n+1}) = H_n(v_{n+1})$
- *esploratore armonico deformato*:
 $P_-(v_{n+1}) = f(H_n(v_{n+1}))$
- *esploratore armonico annullato*: $P_-(v_{n+1}) = 1 - p + (2p - 1)H_n(v_{n+1})$

esempi

- $p = 1 \rightarrow \kappa = 4$
- $p = \frac{1}{2} \rightarrow \kappa = 6$



esploratori p -armonici e sle_{κ}

vantaggi degli esploratori p -armonici

- implementazione economica
- famiglia a un parametro reale come sle_{κ}

congettura

- relazione lineare tra p e κ

$$p = 2 - \frac{\kappa}{4}$$

dimostrazione della congettura

- definizione di coppie di martingale per ogni coppia (p, κ)
- stabilita una possibile famiglia di martingale

esploratori p -armonici e sle_{κ}

vantaggi degli esploratori p -armonici

- implementazione economica
- famiglia a un parametro reale come sle_{κ}

congettura

- relazione lineare tra p e κ

$$p = 2 - \frac{\kappa}{4}$$

dimostrazione della congettura

- definizione di coppie di martingale per ogni coppia (p, κ)
- stabilita una possibile famiglia di martingale

esploratori p -armonici e sle_{κ}

vantaggi degli esploratori p -armonici

- implementazione economica
- famiglia a un parametro reale come sle_{κ}

congettura

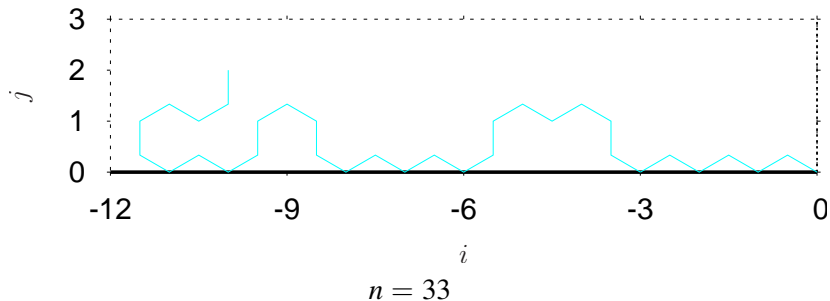
- relazione lineare tra p e κ

$$p = 2 - \frac{\kappa}{4}$$

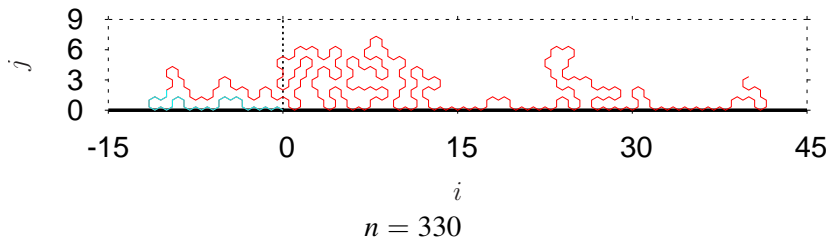
dimostrazione della congettura

- definizione di coppie di martingale per ogni coppia (p, κ)
- stabilita una possibile famiglia di martingale

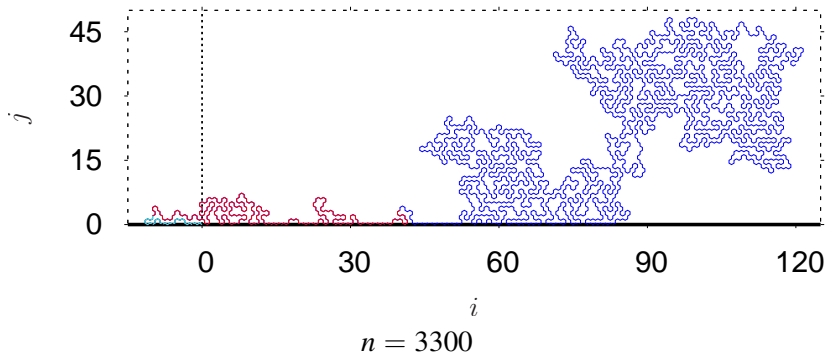
esploratore antiarmonico nel semipiano



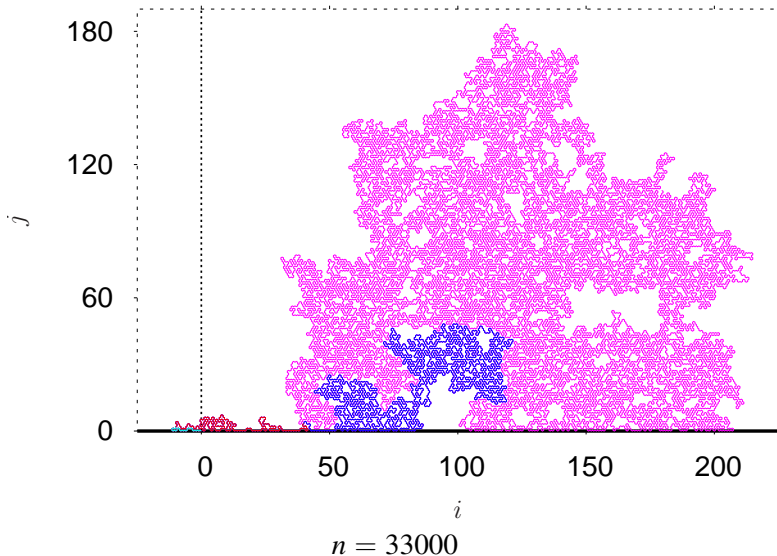
esploratore antiarmonico nel semipiano



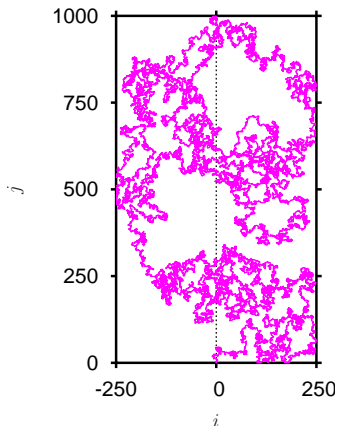
esploratore antiarmonico nel semipiano



esploratore antiarmonico nel semipiano



esploratori p -armonici invarianti conformi?

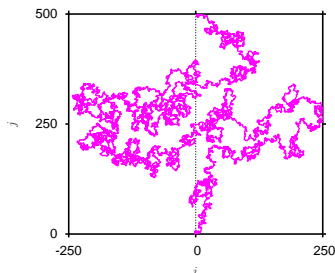


probabilità di attraversamento

- presenza di **invarianza conforme**
- congettura verso **direzione corretta**



esploratori p -armonici invarianti conformi?

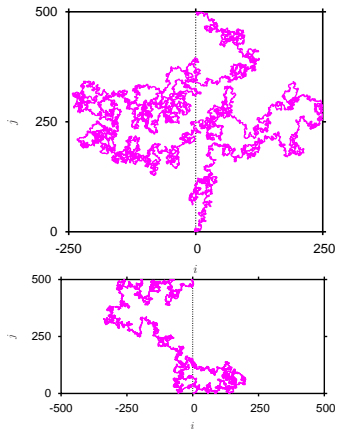


probabilità di attraversamento

- presenza di **invarianza conforme**
- congettura verso **direzione corretta**



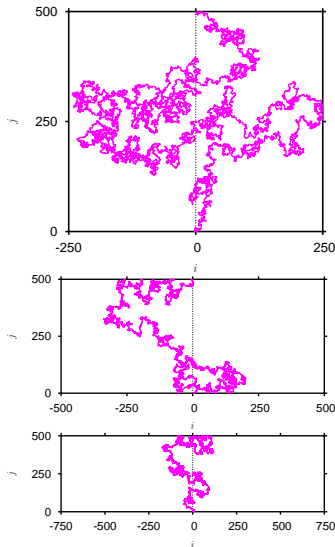
esploratori p -armonici invarianti conformi?



probabilità di attraversamento

- presenza di **invarianza conforme**
- congettura verso **direzione corretta**

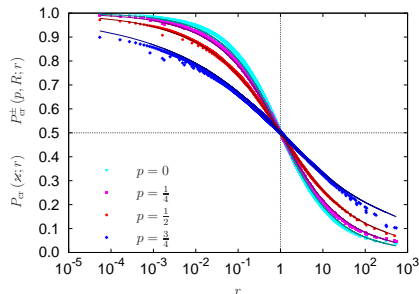
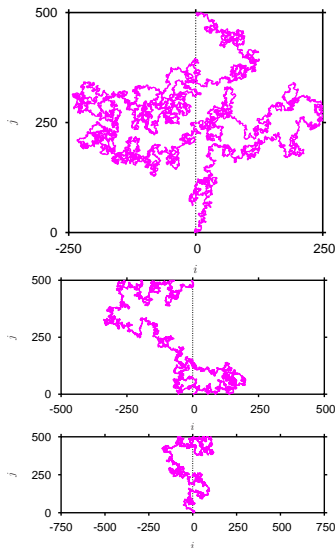
esploratori p -armonici invarianti conformi?



probabilità di attraversamento

- presenza di **invarianza conforme**
- congettura verso **direzione corretta**

esploratori p -armonici invarianti conformi?



probabilità di attraversamento

- presenza di **invarianza conforme**
- congettura verso **direzione corretta**

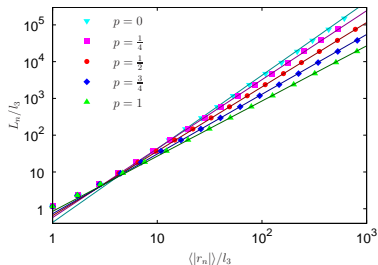
quale s/e_κ per l'esploratore p -armonico?

dimensioni frattali

$$d_\gamma^{\text{con}} = 2 - \frac{p}{2}$$

congettura $p-\kappa$

- buona approssimazione



quale sle_κ per l'esploratore p -armonico?

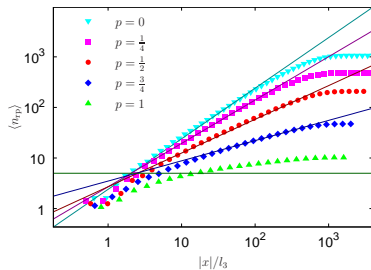
dimensioni frattali

$$d_\gamma^{\text{con}} = 2 - \frac{p}{2}$$

$$d_{\text{rp}}^{\text{con}} = 2 - \frac{2}{2-p}$$

congettura $p-\kappa$

- buona approssimazione



quale s/e_ν per l'esploratore p -armonico?

dimensioni frattali

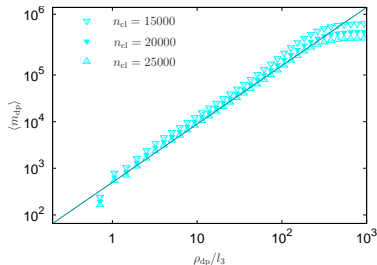
$$d_\gamma^{\text{con}} = 2 - \frac{p}{2}$$

$$d_{\text{rp}}^{\text{con}} = 2 - \frac{2}{2-p}$$

$$d_{\text{dp}}^{\text{con}} = \frac{(p-1)(p-5)}{2(2-p)}$$

congettura $p-\nu$

- buona approssimazione



quale s/e_\varkappa per l'esploratore p -armonico?

dimensioni frattali

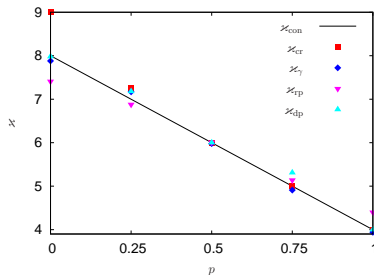
$$d_\gamma^{\text{con}} = 2 - \frac{p}{2}$$

$$d_{\text{rp}}^{\text{con}} = 2 - \frac{2}{2-p}$$

$$d_{\text{dp}}^{\text{con}} = \frac{(p-1)(p-5)}{2(2-p)}$$

congettura p - \varkappa

- buona approssimazione



conclusioni e prospettive

processi stocastici di crescita

- descrizione geometrica di sistemi fisici bidimensionali
- invarianza conforme e classi di universalità
- s/e_\varkappa famiglia di processi continui
- equivalente discreto di comoda implementazione?

esploratori armonici annullati

- markoviani per costruzione
- invarianti conformi
- $\varkappa(p)$ lineare

a. celani, a. mazzino, m. tizzi
sottoposto a *j. stat. mech.*

prospettive

- esploratori nonlinear-armonici
- ricerca di martingale per ogni classe

conclusioni e prospettive

processi stocastici di crescita

- descrizione geometrica di sistemi fisici bidimensionali
- invarianza conforme e classi di universalità
- s/e_x famiglia di processi continui
- equivalente discreto di comoda implementazione?

esploratori armonici annullati

- markoviani per costruzione
- **invarianti conformi**
- **$\kappa(p)$ lineare**

a. celani, a. mazzino, m. tizzi
sottoposto a *j. stat. mech.*

prospettive

- esploratori nonlinear-armonici
- ricerca di martingale per ogni classe

conclusioni e prospettive

processi stocastici di crescita

- descrizione geometrica di sistemi fisici bidimensionali
- invarianza conforme e classi di universalità
- s/e_κ famiglia di processi continui
- equivalente discreto di comoda implementazione?

esploratori armonici annullati

- markoviani per costruzione
- **invarianti conformi**
- **$\kappa(p)$ lineare**

a. celani, a. mazzino, m. tizzi
sottoposto a *j. stat. mech.*

prospettive

- esploratori nonlinear-armonici
- ricerca di martingale per ogni classe

sommario

- 1 descrizione geometrica di sistemi fisici
 - processi di crescita sul piano
 - processi esplorativi ed evoluzioni stocastiche
- 2 costruzione di una classe di esploratori
 - generalizzazione dell'esploratore armonico
 - proprietà al limite continuo

