

xxxii convegno informale di fisica teorica

## processi esplorativi nel piano ed evoluzione di löwner stocastica

antonio celani<sup>a</sup>   andrea mazzino<sup>b</sup>   marco tizzi<sup>b</sup>

<sup>a</sup>centre national de la recherche scientifique, institut pasteur, paris

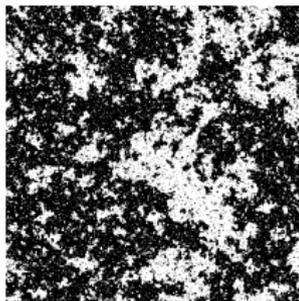
<sup>b</sup>istituto nazionale di fisica nucleare, sezione di genova  
università di genova, dipartimento di fisica

sestri levante, mercoledì 10 giugno 2009



# descrivere sistemi fisici in due dimensioni

meccanica  
statistica



## descrizione geometrica

- proprietà di interfacce
- simmetrie statistiche
- classi di universalità

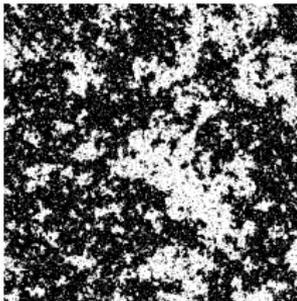
## simmetrie

- isotropia
- invarianza di scala
- **invarianza conforme**

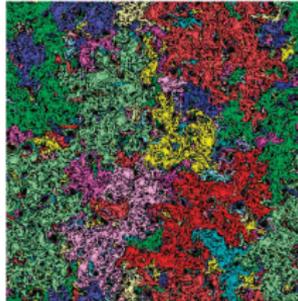


# descrivere sistemi fisici in due dimensioni

meccanica  
statistica



turbolenza



descrizione geometrica

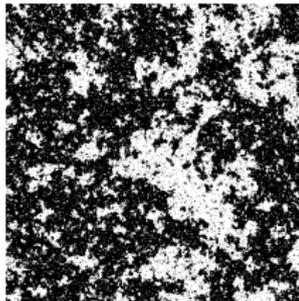
- proprietà di interfacce
- simmetrie statistiche
- classi di universalità

simmetrie

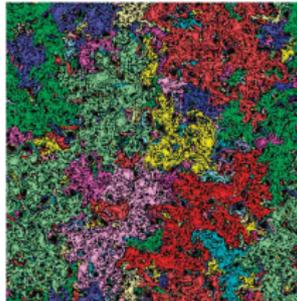
- isotropia
- invarianza di scala
- **invarianza conforme**

# descrivere sistemi fisici in due dimensioni

meccanica  
statistica



turbolenza



fratture



descrizione geometrica

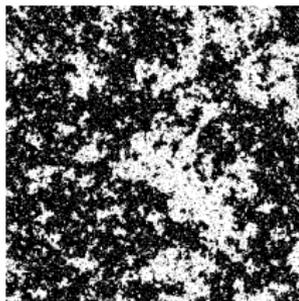
- proprietà di interfacce
- simmetrie statistiche
- classi di universalità

simmetrie

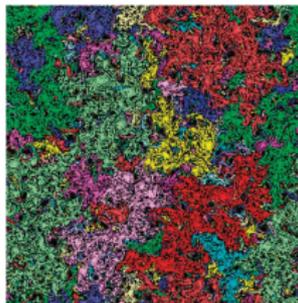
- isotropia
- invarianza di scala
- **invarianza conforme**

# descrivere sistemi fisici in due dimensioni

meccanica  
statistica



turbolenza



fratture



descrizione geometrica

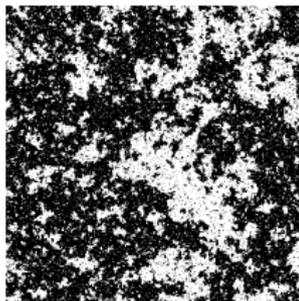
- proprietà di interfacce
- simmetrie statistiche
- classi di universalità

simmetrie

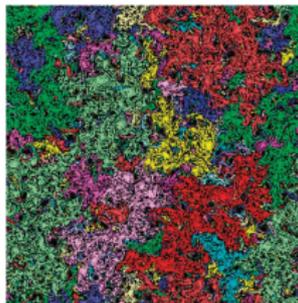
- isotropia
- invarianza di scala
- **invarianza conforme**

# descrivere sistemi fisici in due dimensioni

meccanica  
statistica



turbolenza



fratture



descrizione geometrica

- proprietà di interfacce
- simmetrie statistiche
- classi di universalità

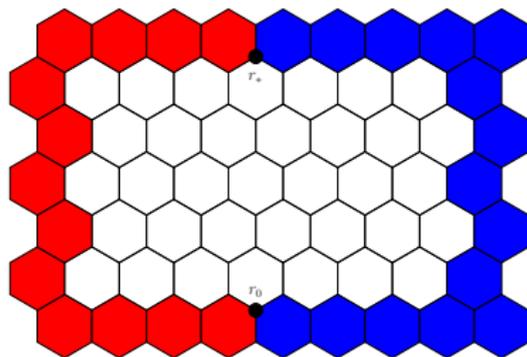
simmetrie

- isotropia
- invarianza di scala
- **invarianza conforme**

# processi discreti di crescita stocastica

## modelli di meccanica statistica

- realizzazione stocastica di equilibrio
- domini omogenei
- **interfacce critiche**



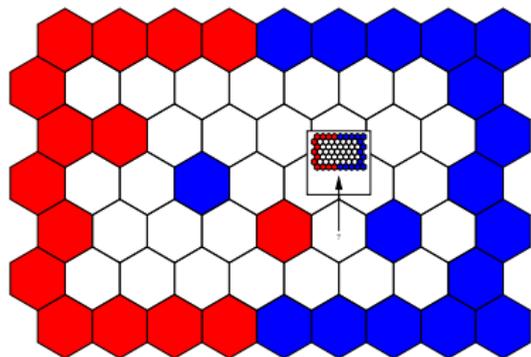
## *processi esplorativi*

- regola stocastica di avanzamento
- misura sulla curva
- **equivalenza**  
curva interfaccia

# processi discreti di crescita stocastica

## modelli di meccanica statistica

- realizzazione stocastica di equilibrio
- domini omogenei
- interfacce critiche



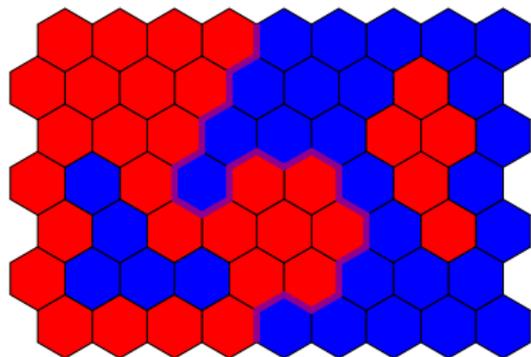
## *processi esplorativi*

- regola stocastica di avanzamento
- misura sulla curva
- equivalenza
- curva interfaccia

# processi discreti di crescita stocastica

## modelli di meccanica statistica

- realizzazione stocastica di equilibrio
- domini omogenei
- **interfacce critiche**



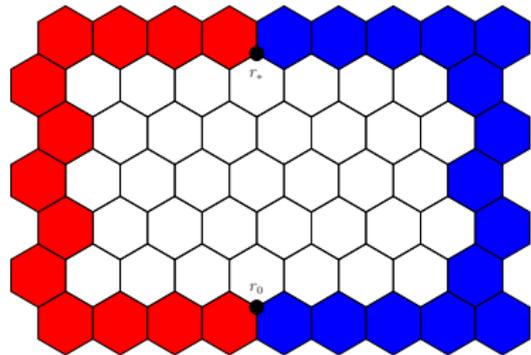
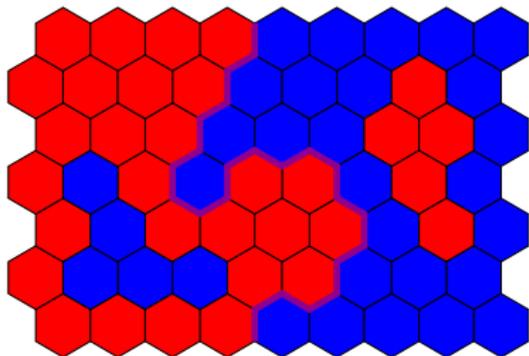
## *processi esplorativi*

- regola stocastica di avanzamento
- misura sulla curva
- equivalenza
- *curve interfaccia*

# processi discreti di crescita stocastica

## modelli di meccanica statistica

- realizzazione stocastica di equilibrio
- domini omogenei
- **interfacce critiche**



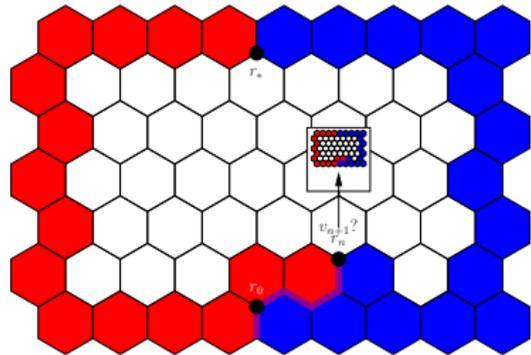
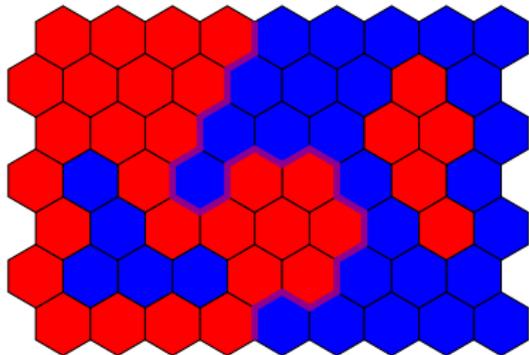
## processi esplorativi

- regola stocastica di avanzamento
- misura sulla curva
- **equivalenza**  
curva-interfaccia

# processi discreti di crescita stocastica

## modelli di meccanica statistica

- realizzazione stocastica di equilibrio
- domini omogenei
- **interfacce critiche**



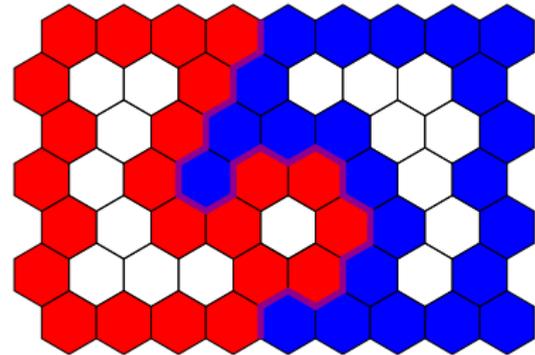
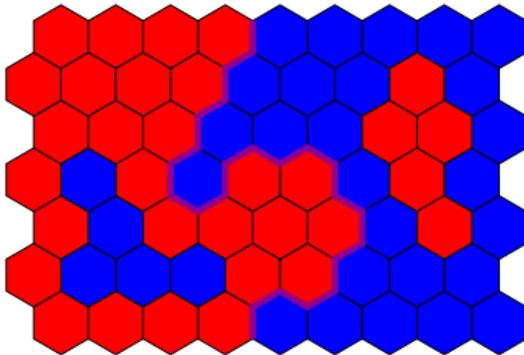
## processi esplorativi

- regola stocastica di avanzamento
- misura sulla curva
- **equivalenza**  
curva-interfaccia

# processi discreti di crescita stocastica

## modelli di meccanica statistica

- realizzazione stocastica di equilibrio
- domini omogenei
- **interfacce critiche**



## *processi esplorativi*

- regola stocastica di avanzamento
- misura sulla curva
- **equivalenza** curva-interfaccia

# processi continui di crescita stocastica



## markovianità

$$\mu(\gamma|\gamma_1, \mathcal{D}) = \mu(\gamma \setminus \gamma_1, \mathcal{D} \setminus \gamma_1)$$

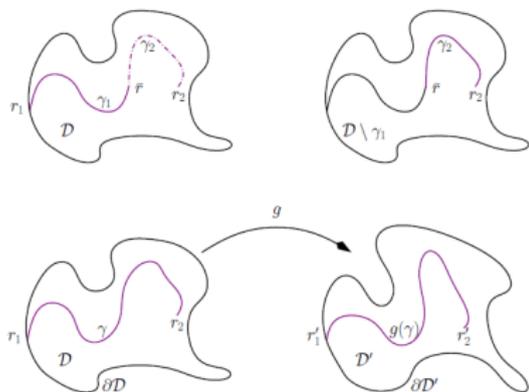
## invarianza conforme

$$\mu(\gamma, \mathcal{D}) = (g * \mu)(g(\gamma), g(\mathcal{D}))$$

## evoluzione di löwner

$$\frac{d}{dt} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - a_t}$$

# processi continui di crescita stocastica



## markovianità

$$\mu(\gamma | \gamma_1, \mathcal{D}) = \mu(\gamma \setminus \gamma_1, \mathcal{D} \setminus \gamma_1)$$

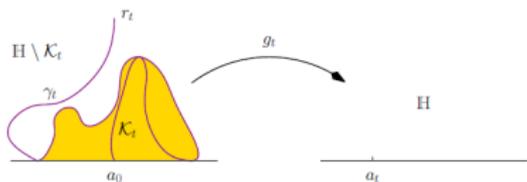
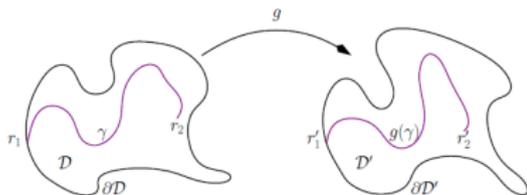
## invarianza conforme

$$\mu(\gamma, \mathcal{D}) = (g * \mu)(g(\gamma), g(\mathcal{D}))$$

## evoluzione di löwner

$$\frac{d}{dt} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - a_t}$$

# processi continui di crescita stocastica



## markovianità

$$\mu(\gamma | \gamma_1, \mathcal{D}) = \mu(\gamma \setminus \gamma_1, \mathcal{D} \setminus \gamma_1)$$

## invarianza conforme

$$\mu(\gamma, \mathcal{D}) = (g * \mu)(g(\gamma), g(\mathcal{D}))$$

## evoluzione di löwner

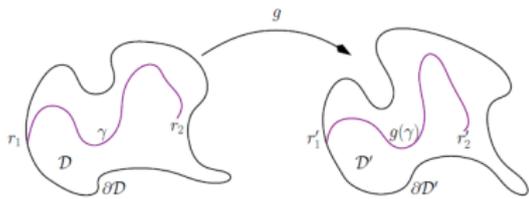
$$\frac{d}{dt} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - a_t}$$

# processi continui di crescita stocastica



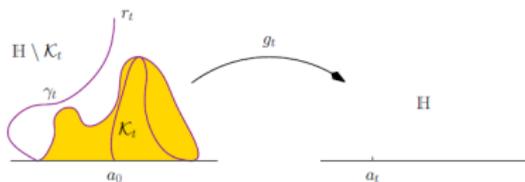
markovianità

$$\mu(\gamma | \gamma_1, \mathcal{D}) = \mu(\gamma \setminus \gamma_1, \mathcal{D} \setminus \gamma_1)$$



invarianza conforme

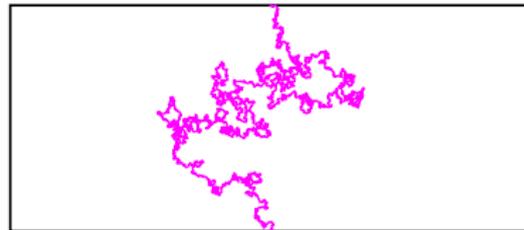
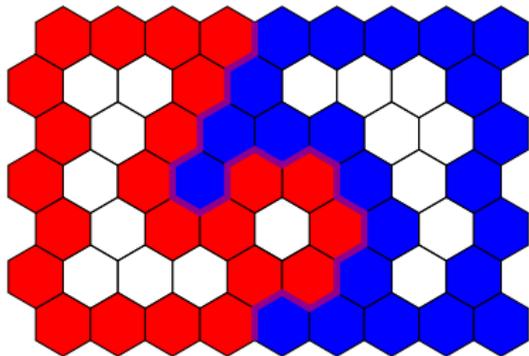
$$\mu(\gamma, \mathcal{D}) = (g * \mu)(g(\gamma), g(\mathcal{D}))$$



evoluzione di löwner  
*stocastica*

$$\frac{d}{dt} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \sqrt{z} B_t}$$

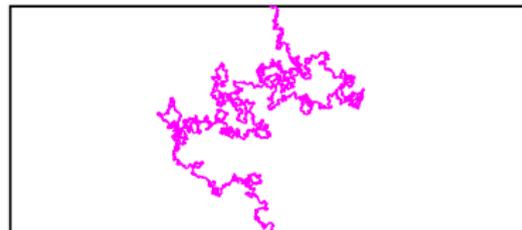
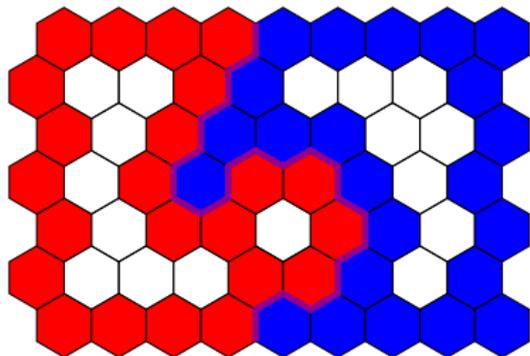
# convergenza del processo discreto al continuo



problema aperto

- ogni  $s/e_x$  limite continuo di un processo esplorativo?

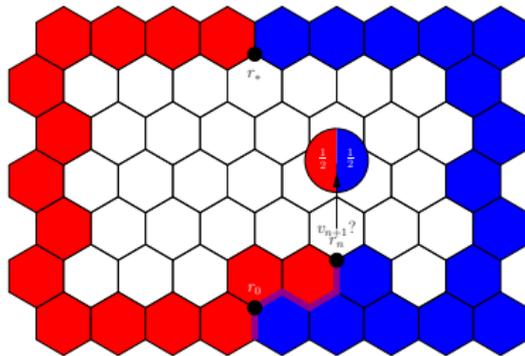
# convergenza del processo discreto al continuo



## problema aperto

- ogni  $sle_x$  **limite continuo** di un processo esplorativo?

# ad oggi solo due casi dimostrati



percolazione critica

●  $\kappa = 6$

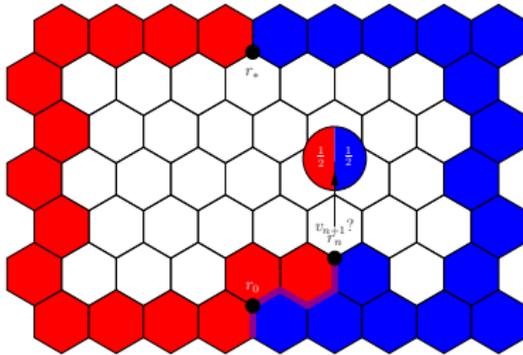
esploratore armonico

●  $\kappa = 4$

obiettivi

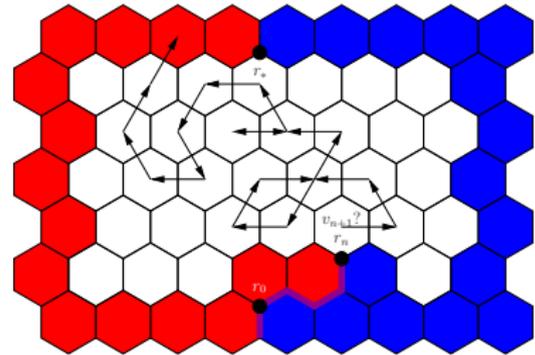
- generalizzazione di questi esploratori
- costruzione di una classe di esploratori markoviani e invarianti conformi

# ad oggi solo due casi dimostrati



percolazione critica

•  $\kappa = 6$



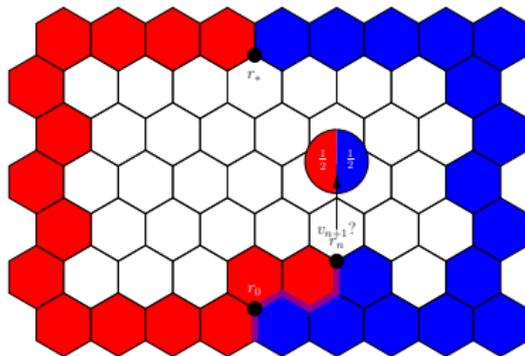
esploratore armonico

•  $\kappa = 4$

obiettivi

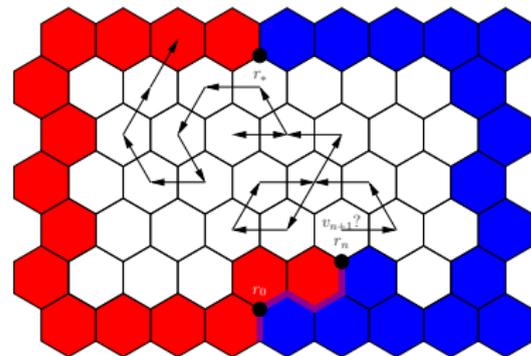
- generalizzazione di questi esploratori
- costruzione di una classe di esploratori markoviani e invarianti conformi

# ad oggi solo due casi dimostrati



percolazione critica

•  $\kappa = 6$



esploratore armonico

•  $\kappa = 4$

## obiettivi

- **generalizzazione** di questi esploratori
- costruzione di una **classe** di esploratori markoviani e invarianti conformi

# processi di percolazione non conformi

## regola di avanzamento

- lancio di moneta

## probabilità di svolta a destra

$$P_-(v_{n+1}) = \frac{1}{2}$$

## percolazione critica

- markoviana
- invariante conforme

## regola di avanzamento

- lancio di moneta truccata

## probabilità di svolta a destra

$$P_-(v_{n+1}) = p$$

## *percolazione iniqua*

- markoviana
- **non** invariante conforme

# processi di percolazione non conformi

## regola di avanzamento

- lancio di moneta

## probabilità di svolta a destra

$$P_-(v_{n+1}) = \frac{1}{2}$$

## percolazione critica

- markoviana
- invariante conforme

## regola di avanzamento

- lancio di moneta truccata

## probabilità di svolta a destra

$$P_-(v_{n+1}) = p$$

## *percolazione iniqua*

- markoviana
- **non** invariante conforme

# processi di percolazione non conformi

## regola di avanzamento

- lancio di moneta

## probabilità di svolta a destra

$$P_-(v_{n+1}) = \frac{1}{2}$$

## percolazione critica

- markoviana
- invariante conforme

## regola di avanzamento

- lancio di moneta truccata

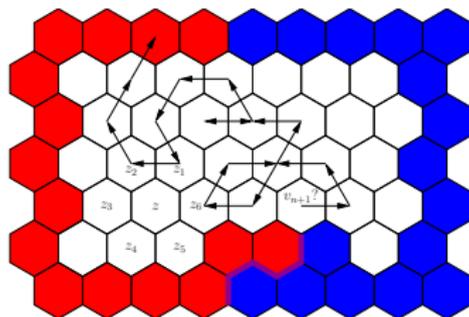
## probabilità di svolta a destra

$$P_-(v_{n+1}) = p$$

## *percolazione iniqua*

- markoviana
- **non** invariante conforme

# ruolo cruciale della passeggiata aleatoria



## armonicità

$$\mathcal{P}[z \xrightarrow{rw} r] = H_n(z)$$

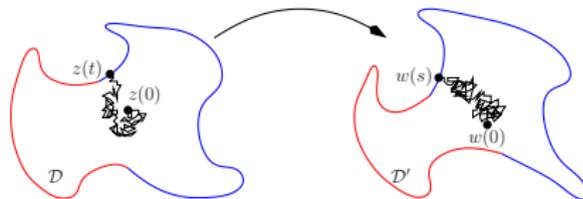
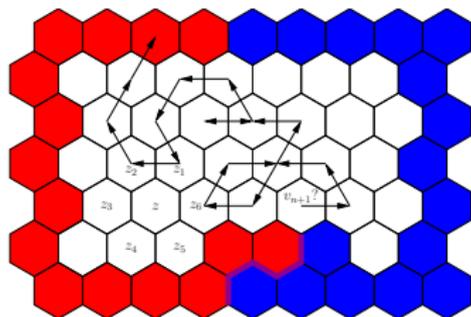
$$\Delta H_n(z) = 0$$

## invarianza conforme

$$\begin{cases} dx = dW_x(t) \\ dy = dW_y(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = dW_u(s) \\ dv = dW_v(s) \end{cases}$$

se  $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$  conforme

# ruolo cruciale della passeggiata aleatoria



## armonicità

$$\mathcal{P}\left[z \xrightarrow{rw} r\right] = H_n(z)$$

$$\Delta H_n(z) = 0$$

## invarianza conforme

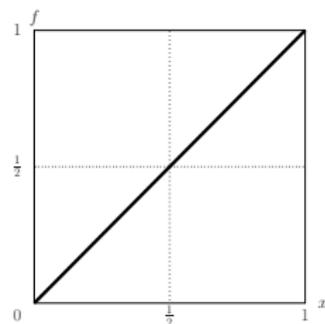
$$\begin{cases} dx = dW_x(t) \\ dy = dW_y(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = dW_u(s) \\ dv = dW_v(s) \end{cases}$$

se  $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$  conforme

# una famiglia a un parametro di esploratori

## probabilità di svolta a destra

- esploratore armonico:  
 $P_-(v_{n+1}) = H_n(v_{n+1})$
- *esploratore armonico deformato*:  
 $P_-(v_{n+1}) = f(H_n(v_{n+1}))$
- *esploratore armonico annullato*:  $P_-(v_{n+1}) = 1 - p + (2p - 1)H_n(v_{n+1})$



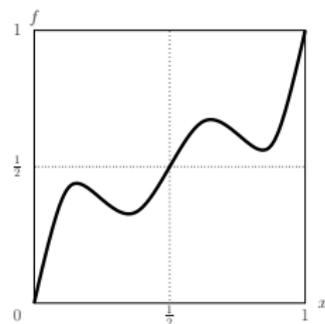
## esempi

- $p = 1 \rightarrow \kappa = 4$
- $p = \frac{1}{2} \rightarrow \kappa = 6$

# una famiglia a un parametro di esploratori

## probabilità di svolta a destra

- esploratore armonico:  
 $P_-(v_{n+1}) = H_n(v_{n+1})$
- *esploratore armonico deformato*:  
 $P_-(v_{n+1}) = f(H_n(v_{n+1}))$
- *esploratore armonico annullato*:  $P_-(v_{n+1}) = 1 - p + (2p - 1)H_n(v_{n+1})$



## esempi

- $p = 1 \rightarrow \kappa = 4$
- $p = \frac{1}{2} \rightarrow \kappa = 6$

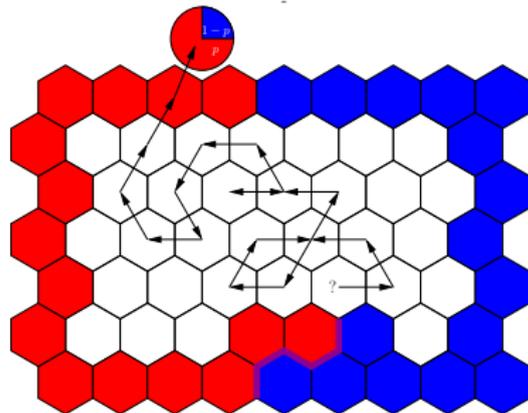
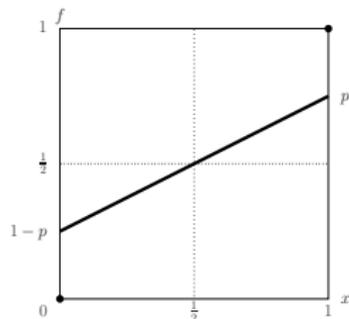
# una famiglia a un parametro di esploratori

## probabilità di svolta a destra

- esploratore armonico:  
 $P_-(v_{n+1}) = H_n(v_{n+1})$
- *esploratore armonico deformato*:  
 $P_-(v_{n+1}) = f(H_n(v_{n+1}))$
- *esploratore armonico annullato*:  $P_-(v_{n+1}) = 1 - p + (2p - 1)H_n(v_{n+1})$

## esempi

- $p = 1 \rightarrow \kappa = 4$
- $p = \frac{1}{2} \rightarrow \kappa = 6$



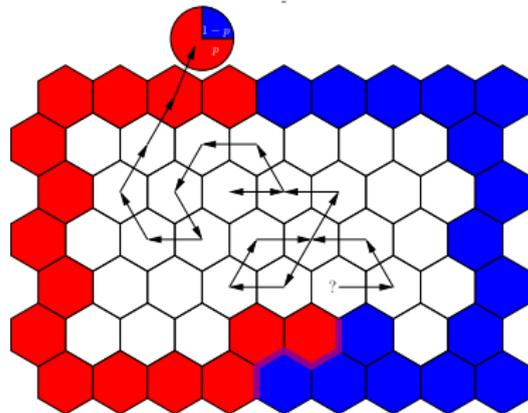
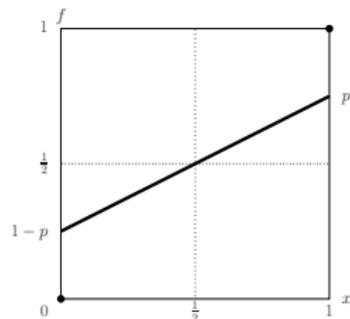
# una famiglia a un parametro di esploratori

## probabilità di svolta a destra

- esploratore armonico:  
 $P_-(v_{n+1}) = H_n(v_{n+1})$
- *esploratore armonico deformato*:  
 $P_-(v_{n+1}) = f(H_n(v_{n+1}))$
- *esploratore armonico annullato*:  $P_-(v_{n+1}) = 1 - p + (2p - 1)H_n(v_{n+1})$

## esempi

- $p = 1 \rightarrow \kappa = 4$
- $p = \frac{1}{2} \rightarrow \kappa = 6$



# esploratori $p$ -armonici e $sle_{\kappa}$

## vantaggi degli esploratori $p$ -armonici

- implementazione economica
- famiglia a un parametro reale come  $sle_{\kappa}$

## congettura

- relazione lineare tra  $p$  e  $\kappa$

$$p = 2 - \frac{\kappa}{4}$$

## dimostrazione della congettura

- definizione di coppie di martingale per ogni coppia  $(p, \kappa)$
- stabilita una possibile famiglia di martingale

# esploratori $p$ -armonici e $sle_{\kappa}$

## vantaggi degli esploratori $p$ -armonici

- implementazione economica
- famiglia a un parametro reale come  $sle_{\kappa}$

## congettura

- relazione lineare tra  $p$  e  $\kappa$

$$p = 2 - \frac{\kappa}{4}$$

## dimostrazione della congettura

- definizione di coppie di martingale per ogni coppia  $(p, \kappa)$
- stabilita una possibile famiglia di martingale

# esploratori $p$ -armonici e $sle_{\kappa}$

## vantaggi degli esploratori $p$ -armonici

- implementazione economica
- famiglia a un parametro reale come  $sle_{\kappa}$

## congettura

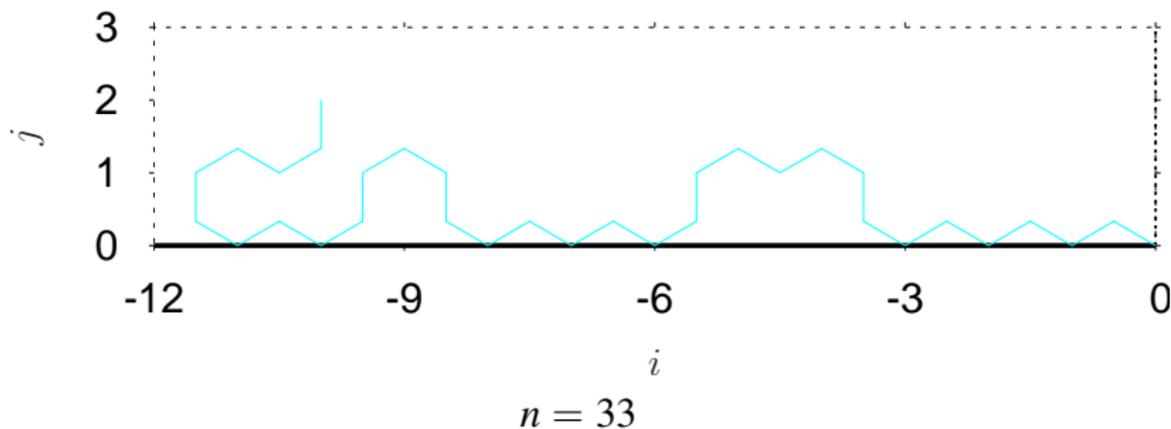
- relazione lineare tra  $p$  e  $\kappa$

$$p = 2 - \frac{\kappa}{4}$$

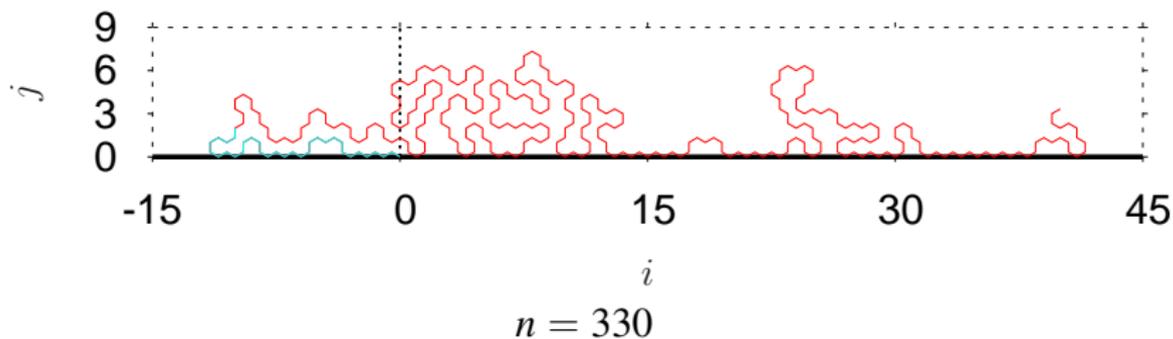
## dimostrazione della congettura

- definizione di coppie di martingale per ogni coppia  $(p, \kappa)$
- stabilita una possibile famiglia di martingale

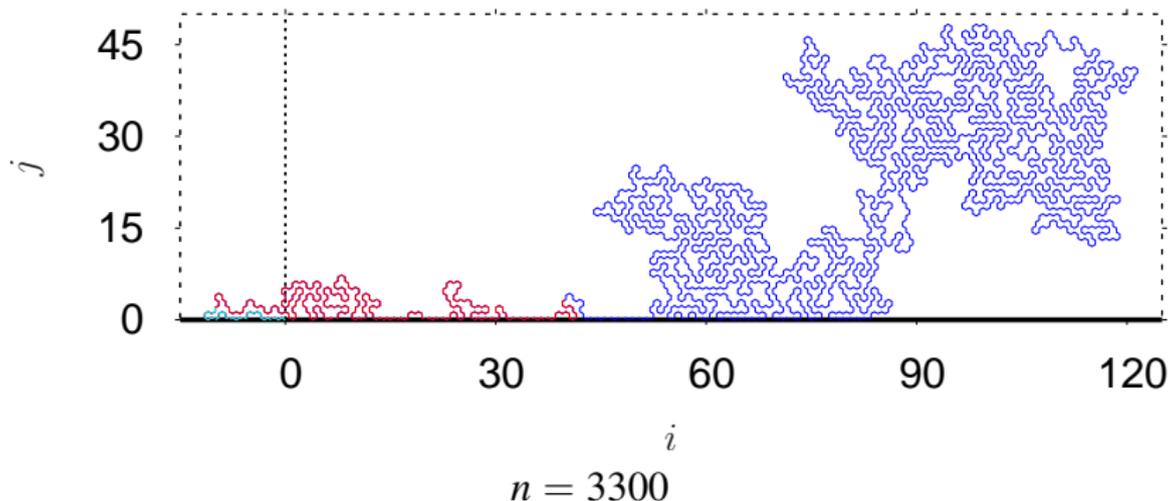
# esploratore antiarmonico nel semipiano



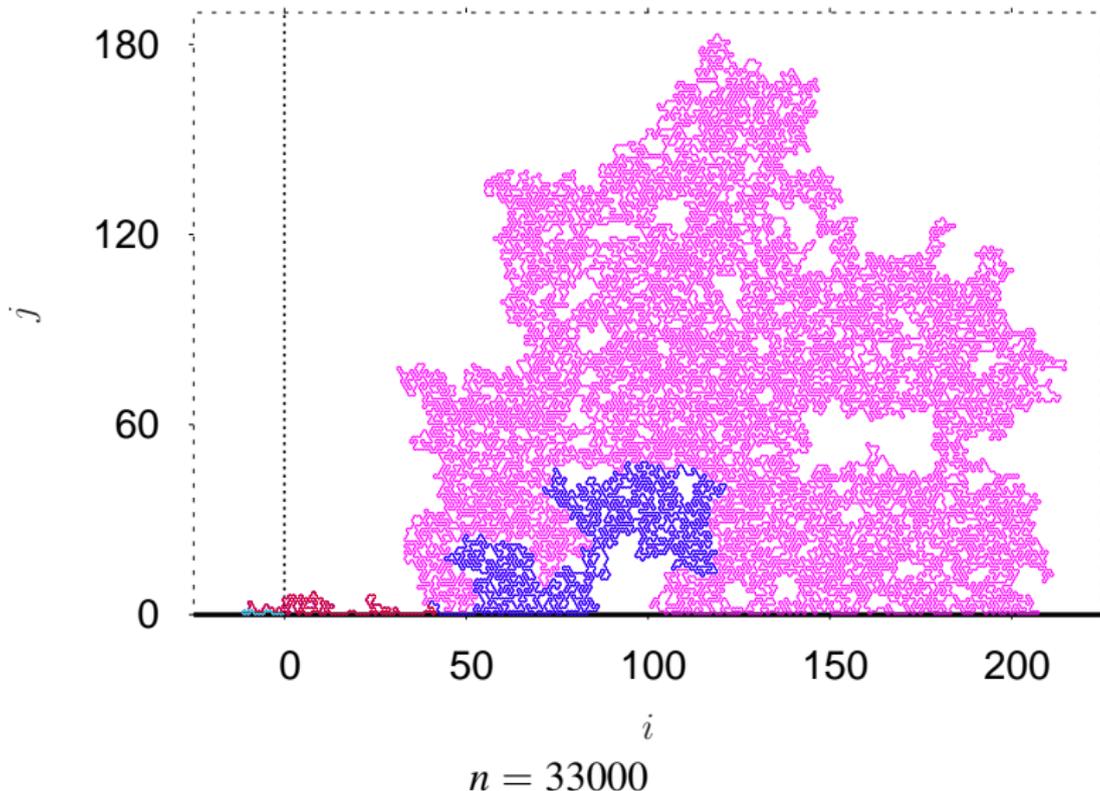
# esploratore antiarmonico nel semipiano



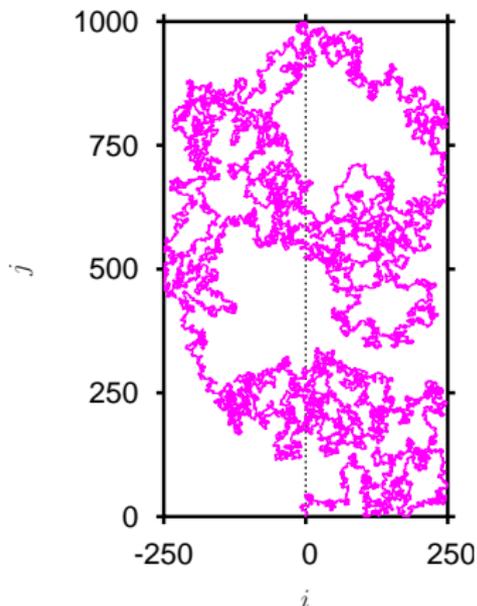
# esploratore antiarmonico nel semipiano



# esploratore antiarmonico nel semipiano



# esploratori $p$ -armonici invarianti conformi?

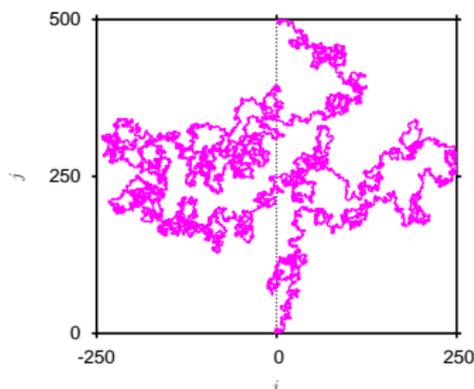


probabilità di attraversamento

- presenza di **invarianza conforme**
- congettura verso **direzione corretta**



# esploratori $p$ -armonici invarianti conformi?

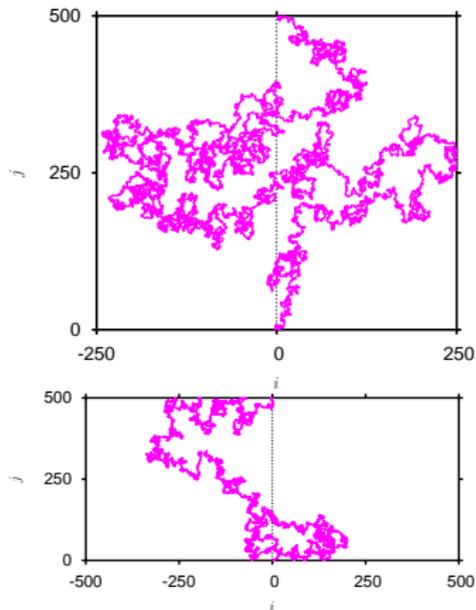


probabilità di attraversamento

- presenza di **invarianza conforme**
- congettura verso **direzione corretta**



# esploratori $p$ -armonici invarianti conformi?

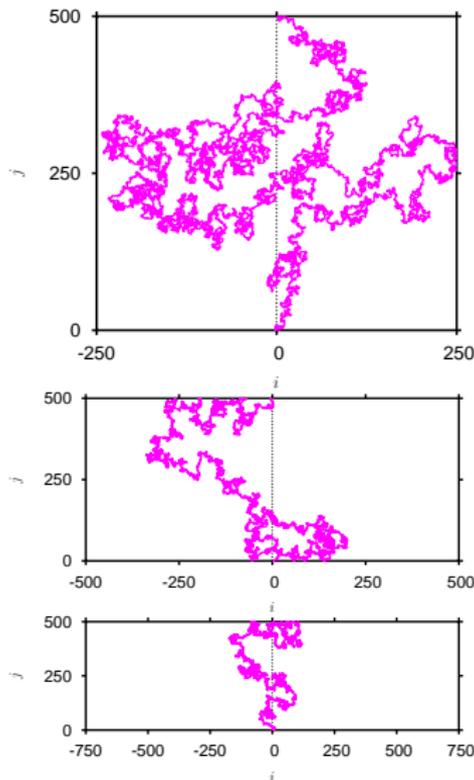


probabilità di attraversamento

- presenza di **invarianza conforme**
- congettura verso **direzione corretta**



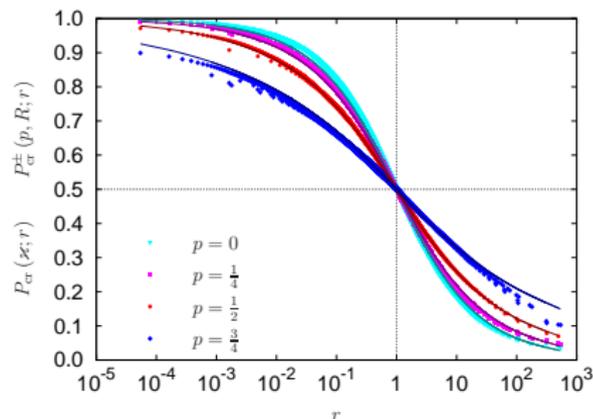
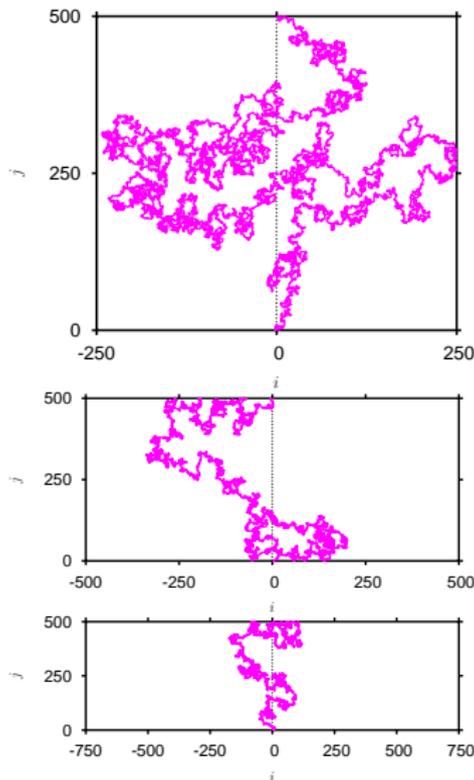
# esploratori $p$ -armonici invarianti conformi?



probabilità di attraversamento

- presenza di **invarianza conforme**
- congettura verso **direzione corretta**

# esploratori $p$ -armonici invarianti conformi?



probabilità di attraversamento

- presenza di **invarianza conforme**
- congettura verso **direzione corretta**

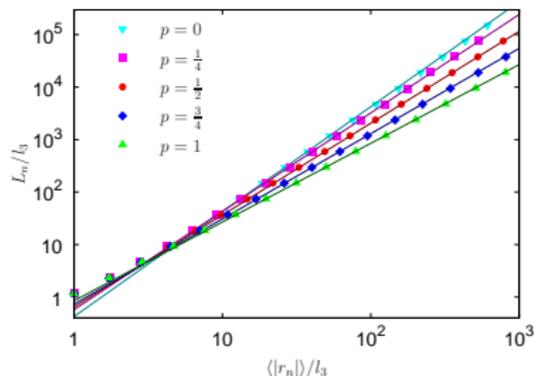
# quale $sle_{\kappa}$ per l'esploratore $p$ -armonico?

## dimensioni frattali

$$d_{\gamma}^{\text{con}} = 2 - \frac{p}{2}$$

## congettura $p$ - $\kappa$

- buona approssimazione



# quale $sle_\kappa$ per l'esploratore $p$ -armonico?

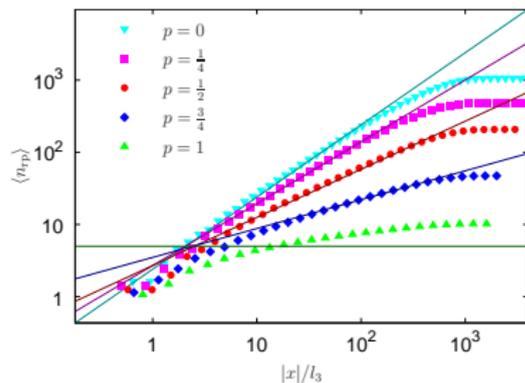
## dimensioni frattali

$$d_\gamma^{\text{con}} = 2 - \frac{p}{2}$$

$$d_{\text{rp}}^{\text{con}} = 2 - \frac{2}{2-p}$$

## congettura $p-\kappa$

- buona approssimazione



# quale $s/e_\kappa$ per l'esploratore $p$ -armonico?

## dimensioni frattali

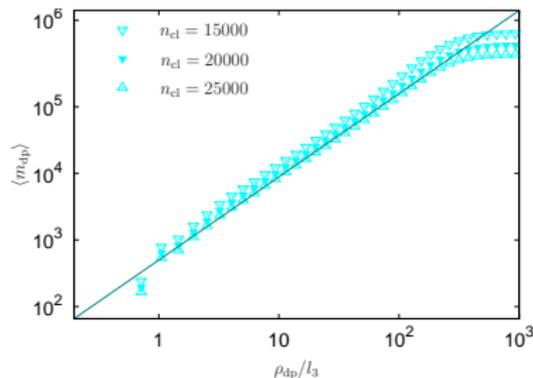
$$d_\gamma^{\text{con}} = 2 - \frac{p}{2}$$

$$d_{\text{rp}}^{\text{con}} = 2 - \frac{2}{2-p}$$

$$d_{\text{dp}}^{\text{con}} = \frac{(p-1)(p-5)}{2(2-p)}$$

## congettura $p-\kappa$

- buona approssimazione



# quale $s/e_\varkappa$ per l'esploratore $p$ -armonico?

## dimensioni frattali

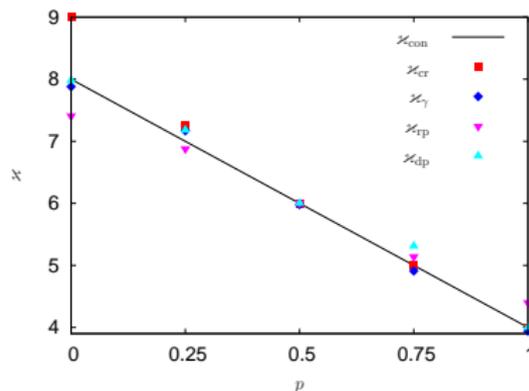
$$d_\gamma^{\text{con}} = 2 - \frac{p}{2}$$

$$d_{\text{rp}}^{\text{con}} = 2 - \frac{2}{2-p}$$

$$d_{\text{dp}}^{\text{con}} = \frac{(p-1)(p-5)}{2(2-p)}$$

## congettura $p$ - $\varkappa$

- buona approssimazione



# conclusioni e prospettive

## processi stocastici di crescita

- descrizione geometrica di sistemi fisici bidimensionali
- invarianza conforme e classi di universalità
- $s/e_\varkappa$  famiglia di processi continui
- equivalente discreto di comoda implementazione?

## esploratori armonici annullati

- markoviani per costruzione
- invarianti conformi
- $\varkappa(p)$  lineare

a. celani, a. mazzino, m. tizzi  
sottoposto a *j. stat. mech.*

## prospettive

- esploratori nonlinear-armonici
- ricerca di martingale per ogni classe

# conclusioni e prospettive

## processi stocastici di crescita

- descrizione geometrica di sistemi fisici bidimensionali
- invarianza conforme e classi di universalità
- $s/e_x$  famiglia di processi continui
- equivalente discreto di comoda implementazione?

## esploratori armonici annullati

- markoviani per costruzione
- **invarianti conformi**
- **$\kappa(p)$  lineare**

a. celani, a. mazzino, m. tizzi  
sottoposto a *j. stat. mech.*

## prospettive

- esploratori nonlinear-armonici
- ricerca di martingale per ogni classe

# conclusioni e prospettive

## processi stocastici di crescita

- descrizione geometrica di sistemi fisici bidimensionali
- invarianza conforme e classi di universalità
- $s/e_\kappa$  famiglia di processi continui
- equivalente discreto di comoda implementazione?

## esploratori armonici annullati

- markoviani per costruzione
- **invarianti conformi**
- **$\kappa(p)$  lineare**

a. celani, a. mazzino, m. tizzi  
sottoposto a *j. stat. mech.*

## prospettive

- esploratori nonlinear-armonici
- ricerca di martingale per ogni classe

# sommario

- 1 descrizione geometrica di sistemi fisici
  - processi di crescita sul piano
  - processi esplorativi ed evoluzioni stocastiche
- 2 costruzione di una classe di esploratori
  - generalizzazione dell'esploratore armonico
  - proprietà al limite continuo

